LAMBDA CALCUL

et sémantique formelle des langages de programmation

actes de la sixième Ecole de Printemps d'informatique théorique
La Châtre 1978

publiés sous la direction de
Bernard ROBINET

MAI 1979

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE THEORIQUE ET PROGRAMMATION
2, place Jussieu — 75005 PARIS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES
32, boulevard Victor — 75015 PARIS

CALCULS FINIS ET INFINIS SUR LES TERMES COMBINATOIRES

R. Canal et J. Vignolle*

I - INTRODUCTION

Tout programme pouvant être traduit en une lambda-expression ou en un terme combinatoire [8 , 15 , 17 , 18 , 22 , 24] il s'ensuit que l'exécution d'un programme écrit en Logique combinatoire consiste en la réduction du terme qui le représente. Si l'on appelle forme normale toute expression irréductible, le problème de la terminaison des programmes [19 , 26] devient alors équivalent à celui de l'existence de la forme normale. Différentes approches en ont été faites en considérant soit le processus de réduction [16] ou la théorie des types [25] soit la complexité de réduction. Dans ce cas, un terme combinatoire a une forme normale si son nombre d'étapes de réduction est fini ; on peut donc considérer ce nombre d'étapes comme une mesure de complexité dynamique. Une telle démarche a été suivie par Dezani-Ciancaglini et Ronchi Della Rocca [13] en lambda-calcul et par Batini et Pettorossi [3] en Logique combinatoire.

*"Langages et Systèmes Informatiques", Université Paul-Sabatier, Toulouse.

Cette étude se place dans la suite des travaux de Batini et Pettorossi mais ne se limite pas à la complexité de calcul sur des bases formées de combinateurs privilégiés (I, K, S...) . De plus, nous cernons de manière plus précise l'évolution du calcul en Logique combinatoire en définissant de nouvelles mesures de complexité dynamiques. Ainsi, nous avons modifié la définition du nombre d'étapes de calcul proposée par Batini et Pettorossi pour tenir compte des variables concaténées à la droite du combinateur. Cette nouvelle mesure est mieux adaptée à la structure des combinés. Ensuite, nous avons défini :

- l'arité du combinateur qui est le nombre minimal de variables qu'il faut lui concaténer pour obtenir la forme normale si elle existe,

- la puissance de réécriture qui est la longueur des formes normales des combinés propres,

- la puissance de réduction qui est la différence entre la longueur du combiné que l'on veut réduire et la longueur de sa forme normale.

Ces nouvelles mesures de complexité permettent de mieux représenter le processus de réduction des termes combinatoires par la règle d'appel par nom.

D'autre part, l'ensemble des combinateurs est divisé en sous-ensembles suivant leurs effets [12] , c'est-à-dire, leur action sur les variables qui leur sont concaténées. Cette division permet de définir des bases générales et d'établir des conditions d'existence ou de non-existence de la forme normale suivant la puissance de réduction des combinateurs formant la base sur laquelle les termes combinatoires sont écrits.

II - DEFINITIONS PRELIMINAIRES

Soit V un ensemble infini dénombrable de variables et V' un ensemble infini dénombrable de constantes. La logique combinatoire a pour alphabet

$$\mathbb{A} = (A_1 , A_2 \dots A_n \dots (,) , = , \triangleright , x_1 , x_2 \dots x_m \dots)$$

ou $\quad \forall i \quad A_i \in V' \quad$ et $\quad \forall j \quad x_j \in V$

Nous appellerons terme combinatoire les mots du langage engendré par la grammaire suivante, d'axiome Z

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow M \mid Z M \mid Z (T) \\ M &\longrightarrow A_i \mid x_j \\ T &\longrightarrow Z M \mid Z (T) \end{aligned}$$

Un combinateur est un terme combinatoire constitué uniquement de constantes, et tout ensemble non vide de constantes sera une base.

Un combiné est un combinateur auquel est concaténé une suite de variables souvent appelées arguments du combinateur.

L'identité syntaxique sera notée "=" , tandis que la relation " X se réduit en Y " sera notée $X \triangleright Y$.

Nous dirons que le combiné X^i est obtenu à partir de X en i étapes de calcul et nous noterons $X \underset{i}{\triangleright} X^i$ s'il existe i termes $X^1 , X^2 \dots X^i \in (V \cup V')^*$ tels que

$$X \underset{1}{\triangleright} X^1 \underset{1}{\triangleright} X^2 \dots \underset{1}{\triangleright} X^{i-1} \underset{1}{\triangleright} X^i$$

Nous désignerons, également, par $\triangleright$ la fermeture transitive de $\underset{1}{\triangleright}$ et par $f_n (X)$ la forme normale du terme combinatoire X .

III - MESURES DE COMPLEXITE EN LOGIQUE COMBINATOIRE

Nous rappelons, tout d'abord, les axiomes de Batini et Pettorossi qui sont bien adaptés à la Logique combinatoire, ensuite, nous donnons les définitions des différentes mesures de complexité utilisées.

1. Les axiomes de Batini - Pettorossi [3]

Définition : s est une mesure de complexité statique si :

1) s est une application récursive de l'ensemble des combinateurs dans celui des entiers.

2) Quel que soit l'entier n , le nombre de combinateurs X tels que s (X) = n est fini.

Ces deux axiomes sont équivalents à ceux de BLUM [4] pour les mesures de taille ; en effet, on sait que tout programme peut se traduire par un combinateur et, qu'inversement, tout combinateur représente un programme.

L'exécution d'un programme équivaut à la réduction du combinateur qui le représente, en sa forme normale lorsqu'elle existe. Si le combinateur possède une forme normale, cela veut dire que le programme se termine et, dans ce cas-là, la forme normale est le résultat du programme. Sinon, le calcul ne s'arrête pas.

Définition : t est une mesure de complexité dynamique si :

1) t est une application récursive partielle de l'ensemble des combinateurs dans celui des entiers.

2) "le combinateur X a une forme normale" implique que " t (X) est défini" .

3) " t (X) est défini" implique que " X a une forme normale" est un problème décidable.

4) " t (X) = m " où m est un entier est décidable.

On retrouve dans cette définition les trois axiomes énoncés par Ausiello dans [1].

En résumé, la complexité statique d'un combinateur est inhérente au fait qu'un combinateur doit être considéré comme une expression bien formée en fonction des combinateurs d'une base spécifique. Par contre, les mesures de complexité dynamiques sont liées au processus de réduction des termes combinatoires en forme normale et, par conséquent, à la règle de réduction choisie.

2. Définition des mesures de complexité utilisées :

Nous allons définir un certain nombre de mesures de complexité propres au système formel de la Logique combinatoire. Les mesures statiques serviront à décrire la structure même des termes combinatoires, tandis que les mesures dynamiques seront introduites dans le but de représenter soit la structure de la forme normale, soit l'évolution des calculs pour obtenir cette forme normale. Certaines de ces mesures ont été présentées par Batini et Pettorossi [3] comme la longueur, la profondeur de parenthèses et le nombre d'étapes de calcul ; nous améliorons cette dernière mesure pour tenir compte de l'importance des variables concaténées à la droite du combinateur sur la structure de la forme normale. Autrement dit, le nombre d'étapes de calcul d'un combinateur sera le nombre de réductions nécessaires pour transformer le combiné associé en sa forme normale, ce qui est une approche plus naturelle.

De même, nous introduisons de nouvelles mesures dynamiques qui nous permettent de mieux cerner le processus de réduction et la nature de la forme normale, comme l'arité, la puissance de réécriture et la puissance de réduction. Définissons, tout d'abord, les mesures statiques :

2.1. Mesures de complexité statiques :

Définition : La longueur d'un terme combinatoire X , notée $\ell(X)$ est égale au nombre d'occurrences d'atomes qui le composent. Cette notion est équivalente à celle plus générale de longueur de chaîne de caractères.

Définition : La profondeur de parenthèses d'un terme combinatoire X notée $PP(X)$ est définie récursivement de la manière suivante :

- si X est un combinateur de base, $PP(X) = 0$
- si $X = X_1 X_2$ alors $PP(X) = \max(PP(X_1), PP(X_2))$
- si $X = X_1 (X_2)$ alors $PP(X) = \max(PP(X_1), PP(X_2) + 1)$.

Exemple : Soit les combinateurs A_1 , A_2 , A_3 tels que :

$A_1 = S(K(KS))(W(C(BB)S))$, $A_2 = SK(WCC)$ et $A_3 = SKK$

alors $PP(A_1) = 3$, $PP(A_2) = 1$ et $PP(A_3) = 0$.

Nous allons maintenant introduire les mesures de complexité dynamiques liées à la structure de la forme normale.

2.2. Mesures de complexité dynamiques :

Définition [12] : On appelle ordre d'un combinateur X , noté $\mathcal{O}(X)$, le plus petit entier m positif ou nul, s'il existe, tel que toute réduction du terme combinatoire $X x_1 \ldots x_m x_{m+1} \ldots x_n$ où $x_i \in V$ est obtenue par application de la règle de déduction suivante :

$$X \rhd X' \longrightarrow XZ \rhd X'Z$$

à une réduction de $X x_1 x_2 \ldots x_m$, sinon $\mathcal{O}(X)$ est infini.

Exemples : $K\,x_1\,x_2\,x_3 \ldots x_n \rhd x_1\,x_3 \ldots x_n$, $\vartheta(K) = 2$

$I\,x_1\,x_2 \ldots x_n \rhd x_1\,x_2 \ldots x_n$ alors $\vartheta(I) = 1$

Soit A le combinateur tel que $A = W\,W\,W$. A ne possède pas de forme normale et $\vartheta(A)$ est nul. En effet :

$$W\,W\,W\,x_1\,x_2 \ldots x_n \ldots \rhd W\,W\,W\,x_1\,x_2 \ldots x_n \rhd W\,W\,W\,x_1\,x_2 \ldots x_n \rhd \ldots$$

Définition [12] : Un combinateur X est propre si la forme normale du combiné $X\,x_1\,x_2 \ldots x_m$, où $m = \vartheta(X)$, ne contient aucune occurrence de combinateur de base, c'est-à-dire, si la règle de réduction de X est de la forme :

$$X\,x_1\,x_2 \ldots x_m \rhd Y$$

où Y désigne une combinaison formée d'occurrences de $x_i \in V$.

Tout combinateur peut se décomposer en une combinaison de combinateurs propres [12] . Toute combinaison de combinateurs d'une base G étant un combinateur, on peut dire qu'une combinaison de combinateurs de base est propre si le combinateur qui la représente (c'est-à-dire, qui a la même règle de réduction) est propre.

Nous allons maintenant définir une mesure dynamique adaptée au sous-ensemble des combinateurs propres :

Définition : L'arité d'un combinateur X notée $\mathfrak{a}(X)$ est définie de la manière suivante :

- $\mathfrak{a}(X) = \vartheta(X)$ si X est propre
- $\mathfrak{a}(X)$ est infinie sinon.

Exemple : $S\,x_1\,x_2\,x_3 \rhd x_1\,x_3\,(x_2\,x_3)$ alors $\mathfrak{a}(S) = 3$.

Définition : La puissance de réécriture d'un combinateur X
P R (X) est définie de la manière suivante :

- si X est propre, alors P R (X) est égale à la longueur de la forme normale du combiné $X x_1 x_2 \ldots x_m$ où m = $\mathcal{L}$ (X)
- sinon, P R (X) est infinie.

Exemples : $S x_1 x_2 x_3 \triangleright x_1 x_3 (x_2 x_3)$ donc P R (X) = 4 , par contre, P R (C C C) est infinie.

Définition : La puissance de réduction d'un combinateur X notée P (X) est définie par :

$$P (X) = \mathcal{L} (X) + 1 - P R (X) \text{ si } X \text{ est propre,}$$

infinie sinon.

Intuitivement, la puissance de réduction représente la différence entre la longueur du combiné que l'on veut réduire, c'est-à-dire, $X x_1 x_2 \ldots x_m$ où m = $\mathcal{L}$ (X) et la longueur de sa forme normale, dans le cas où X est propre.

Exemples : $S x_1 x_2 x_3 \triangleright x_1 x_3 (x_2 x_3)$ alors P (X) = 0 mais P (C C C) est infinie.

Notation : Afin de simplifier l'écriture de termes combinatoires, nous définissons le combiné du combinateur X , que nous notons X_d de la manière suivante :

- si X a une arité finie, alors $X_d = X x_1 \ldots x_m$, où m = $\mathcal{L}$
- sinon si X a un ordre fini, alors $X_d = X x_1 \ldots x_m$ où m = $\mathcal{O}$ (X) .
- sinon le combinateur X n'a pas de combiné.

Définition : Le nombre d'étapes de calcul d'un combinateur X noté T (X) est défini ainsi :

1) T (X) = i si le combiné de X se réduit en sa forme normale en i contractions (i étant un nombre fini) , c'est-à-dire, si $X_d \underset{i}{\rhd} f\,n\,(X_d)$.

2) T (X) est infini sinon.

IV - LES EFFETS DES COMBINATEURS

Craig a souligné dans [12] quatre propriétés caractéristiques des combinateurs suivant l'action qu'ils ont sur la suite des variables qui leur sont concaténées, c'est-à-dire, suivant la différence de structure entre la liste des arguments et la forme normale obtenue après réduction du combinateur.

Définition : Soit un combinateur X d'ordre n défini par la règle de réduction suivante :

$$X\,x_1 \ldots x_n \rhd Y \quad \text{où} \quad Y = f\,n\,(X\,x_1 \ldots x_n) \quad .$$

Nous disons que :

1) X a un effet duplicatif si il existe au moins un indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et tel que Y contienne au moins deux occurrences de x_i .

2) X a un effet cachant si il existe au moins un indice i , $1 \leqslant i \leqslant n$, tel que Y ne contienne pas d'occurrences de x_i .

3) X a un effet composite si Y contient au moins une paire de parenthèses selon la convention d'écriture choisie.

4) X a un effet permutatif si il existe au moins deux indices i et j , avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, et des mots α , β et γ $\in (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)^*$ tels que :

$$Y = \alpha \; x_j \; \beta \; x_i \; \gamma$$

où α , β et γ peuvent être des mots vides.

Définition : 1) Un combinateur X est dit à effet 'a' lorsque le seul effet de X est 'a' à l'exclusion de tout autre.

2) Un combinateur X est dit à effet 'a' ou 'b'

- soit lorsqu'il est à effet 'a'
- soit lorsqu'il est à effet 'b'
- soit lorsque les seuls effets de X sont les effets 'a' et 'b' à la fois, à l'exclusion de tout autre.

3) Un combinateur X est dit à effets a_i , a_2 , ... , a_{n-1} ou a_n lorsqu'il est à effet ,

$$((\ldots(a_1 \text{ ou } a_2) \text{ ou } a_3) \text{ ou } a_4)\ldots) \text{ ou } a_n)$$

Cette décomposition de l'ensemble des combinateurs suivant leurs effets permet d'étudier la structure de la forme normale, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1 : Soit G une base formée de combinateurs A_i avec $i \in J$. J est un ensemble fini d'indices. Une condition nécessaire pour qu'une combinaison X , possédant une forme normale, formée d'occurrences de A_i , ne soit pas propre est l'existence d'un effet permutatif parmi les effets des combinateurs de la base G qui la constituent.

Mais cette division par effet de l'ensemble des combinateurs va surtout nous permettre l'étude de l'existence ou de la non-existence de la forme normale d'un terme combinatoire.

V - CONDITIONS SUFFISANTES D'OBTENTION DE FORMES NORMALES

Le théorème 1 établit une condition d'obtention de la forme normale suivant le signe de la puissance de réduction des combinateurs formant la base sur laquelle les termes combinatoires sont écrits.

Théorème 1 : Toute combinaison linéaire de longueur finie et d'ordre fini formée de combinateurs de puissance de réduction strictement positive, à effet non composite, possède une forme normale.

Démonstration : A chaque étape de réduction, la longueur du terme X' à réduire varie au moins de la puissance de réduction du combinateur le plus à gauche dans X', (d'après les définitions mêmes de la puissance de réduction et de la règle d'appel par nom). Puisque la puissance de réduction de tout combinateur dont il existe au moins une occurrence dans X' est strictement positive, la longueur du combiné X'_d de X' diminue d'au moins une unité à chaque étape.

Soit une combinaison X de longueur finie formée uniquement de combinateurs de puissance de réduction positive. Supposons que X ne possède pas de forme normale. Cela veut dire que le nombre d'étapes nécessaires pour réduire X est infini. La longueur de X diminue donc infiniment puisqu'elle diminue d'au moins une unité à chaque étape.

Ceci est impossible puisque le combiné X_d de X est supposé de longueur finie car $\ell(X)$ est fini ainsi que $\theta(X)$. Donc X possède une forme normale.

Ce théorème est à rapprocher du résultat suivant obtenu par Craig [12].

Théorème 1' : Toute combinaison X formée d'occurrences de combinateurs à effets cachant, composite ou permutatif, de longueur finie possède une forme normale.

C'est donc l'introduction de l'effet duplicatif parmi les effets des combinateurs d'une base G qui entraîne la possibilité de non-existence de la forme normale pour les termes combinatoires construits sur G. Il s'avère donc nécessaire d'obtenir des conditions d'obtention de la forme normale pour les termes combinatoires contenant des occurrences de combinateurs à effet duplicatif. Les résultats simples énoncés par les propositions suivantes sont obtenus en limitant soit le nombre d'occurrences de combinateurs à effet duplicatif, soit la longueur des termes combinatoires considérés.

Proposition 2 : Toute combinaison X de longueur finie formée d'occurrences de combinateurs à effets cachant, composite ou permutatif, possédant une seule occurrence d'un combinateur Y de puissance de réduction finie négative ou nulle, a toujours une forme normale.

Démonstration : Si pour tout indice $j \in J$ tel que $X \underset{j}{\triangleright} X^j$, la première occurrence de combinateur de X^j n'est pas Y, alors on peut dire que $T(X)$ est fini. C'est le cas où Y a disparu à cause d'un effet cachant, ou bien le cas où Y a été permuté et se retrouve dans la forme normale non propre précédée d'au moins une variable. En effet, les seuls combinateurs se trouvant les plus à gauche dans les termes X^j sont des combinateurs de puissance de réduction positive et, dans ce cas, l'existence de la forme normale a été démontrée dans le théorème 1.

Sinon, il existe un indice k fini tel que $X \underset{k}{\triangleright} X^k$ et tel que $X^k = Y \alpha$ avec $\alpha \in (V \cup V')^*$. Par hypothèse, tous les combinateurs appartenant à α sont de puissance de réduction strictement positive.

$$Y \alpha \underset{1}{\triangleright} \alpha' \quad \text{avec} \quad \ell(\alpha) < \ell(\alpha')$$

Puisque les arguments de Y sont, soit des variables, soit des combinateurs de puissance de réduction positive, tous les éléments de α' sont aussi, soit des variables, soit des combinateurs de puissance de réduction positive. De plus, α' possède une forme normale d'après le théorème 1 , ce qui veut dire que $T(\alpha')$ est fini or, $T(X) = k + 1 + T(\alpha')$; k et $T(\alpha')$ étant finis, $T(X)$ l'est aussi, ce qui veut dire que X possède une forme normale.

Etudions le cas d'une combinaison formée de combinateurs à effet quelconque et de puissance de réduction quelconque, mais de longueur limitée.

Proposition 3 : Soit G une base de combinateurs A_j où $j \in J$ et soit n le cardinal de J .

Soit $(k_1, \ldots, k_j, \ldots, k_n)$ la liste des indices des variables les plus à gauche qu'affectent les effets respectifs des combinateurs $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n$ au cours de leur règle de réduction.

Soit X^i tel que $X \underset{i}{\triangleright} X^i$. On notera $X = X^0$. Toute combinaison X formée d'occurrences de A_j telle qu'il existe $i \geqslant 0$ avec $\ell(X^i) \leqslant \operatorname{Inf}_{j \in J} k_j$ possède une forme normale.

Démonstration : Supposons qu'il existe un indice $i \geqslant 0$ tel que :

$$\ell(X^i) \leqslant \operatorname{Inf}_{j \in J} k_j$$

X^i peut s'écrire sous la forme : $X^i = A_p \alpha$ avec $p \in J$ et $\alpha \in (V')^*$, or $\ell(X^i) \leqslant k_p$ a fortiori car $p \in J$.

Donc, aucun effet ne tombe sur un combinateur appartenant à α . Ce qui veut dire que : $\ell(X^{i+1}) = \ell(X^i) - 1$ car la seule occurrence d'élément de X^i qui disparaît est l'élément A_p le plus à gauche dans X^i .

De la même manière, on démontre plus généralement que :
pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\ell(X^{i+m}) = \ell(X^{i+m-1}) - 1 = \ell(X^i) - m$,
en effet, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\ell(X^{i+m}) \leq \operatorname{Inf}_{j \in J} k_j$.

Donc, il existera toujours un entier q tel que :

$$\ell(X^{i+q}) = 0 \quad \text{et} \quad q = \ell(X^i) .$$

X_d^{i+q} représente la forme normale de X_d car le terme X_d^{i+q} ne contient aucune occurrence de combinateur.

Cela veut dire qu'en un nombre d'étapes fini égal à $i + \ell(X^i)$ on obtient la forme normale de X_d . D'où l'existence de celle-ci.

Exemple : Soient les trois combinateurs suivants :

$$A_1 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \quad \triangleright \quad x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; (x_5 \; x_4)$$

$$A_2 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \quad \triangleright \quad x_1 \; x_2 \; x_3 \; (x_4 \; x_4)$$

$$A_3 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \quad \triangleright \quad x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_6$$

Toute combinaison X formée d'occurrences de A_1 , A_2 et A_3 de longueur inférieure ou égale à 4 possède une forme normale.

En effet, $k_1 = 4$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$ et $\operatorname{Inf} \{k_1, k_2, k_3\} = 4$.

Ainsi $X_1 = A_3 \, A_3 \, (A_1 \, A_2)$ possède une forme normale. Cependant, il existe des combinaisons de longueur supérieure à 4 et formée d'occurrences de A_1 , A_2 et A_3 possédant une forme normale ; ce sont les combinaisons possédant au moins un terme transitoire de longueur inférieure ou égale à 4 . Ainsi :

$Y = A_3 \, A_3 \, A_2 \, A_2 \, A_3 \, (A_3 \, (A_2 \, A_1 \, A_2)) \, A_4$ possède une forme normale.

En effet : $\quad Y \underset{1}{\triangleright} A_3 \, A_2 \, A_2 \, A_3 \, A_4 = Y^1$

$$Y_d^1 = A_3 \, A_2 \, A_2 \, A_3 \, A_4 \, x_1 \, x_2 \quad \underset{1}{\triangleright} \quad A_2 \, A_2 \, A_3 \, A_4 \, x_2 = Y'^2_d$$

donc $Y^2 = A_2 \, A_2 \, A_3 \, A_4$ qui a une longueur égale à 4 possède une forme normale et par conséquent Y aussi.

VI - CONDITIONS SUFFISANTES DE NON-EXISTENCE DE FORMES NORMALES

Nous donnons, dans ce paragraphe, quelques conditions suffisantes pour que le nombre d'étapes de calcul soit infini, c'est-à-dire, pour que certains combinés n'aient pas de formes normales. Nous traiterons donc, plus particulièrement, des combinateurs ayant une puissance de réduction négative ou nulle et nous étudierons, tout d'abord, le cas des combinaisons linéaires.

Pour ne pas alourdir ce bref exposé, certaines preuves seront omises mais on pourra se reporter à [9] pour avoir une étude plus complète.

Proposition 4 : Soit G une base formée de combinateurs A_j où $j \in J$ d'arité a_j à effets quelconques mais non composites tels que :

$$P(A_j) \leqslant 0 \qquad \forall j \in J$$

Toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_j telle que $\ell(X) > \sup_{j \in J} a_j$ a un nombre d'étapes de calcul infini.

En effet, à chaque réduction, la longueur de l'expression transitoire augmente ou reste fixe. Etant donné que A_j est propre, il existe toujours un combinateur comme élément le plus à gauche d'une expression transitoire, donc, une réduction est toujours possible et le nombre d'étapes de calcul est infini.

L'influence de certains effets étant prépondérante, il est nécessaire de préciser leur nature.

Définition : Un combinateur X tel que $X_d \rhd Y = f_n(X_d)$ a un effet

- cachant de degré n s'il existe n variables x_i distinctes ayant plus d'une occurrence dans Y

- duplicatif de degré n de puissance $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

1) s'il existe n variables x_i distinctes ayant plus d'une occurrence dans Y

2) le nombre d'occurrences de x_i dans Y étant respectivement α_i.

Exemple : Le combinateur A tel que :

$$A\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \ \rhd\ x_1\ x_2\ x_2\ x_2\ x_3\ x_3\ x_4\ x_4\ x_4$$

a un effet duplicatif de degré 3 et de puissance (3, 2, 3).

Proposition 5 : Soit A un combinateur propre d'arité a à effet permutatif, cachant de degré n_1 ou duplicatif de degré n_2 et de puissance $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_2})$.

Si $n_1 + n_2 < \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i$ alors toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A et vérifiant $\ell(X) > a$ ne possède pas de forme normale.

Exemple : Soit A un combinateur propre défini par la règle de réduction suivante :

$$A\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6 \ \rhd\ x_3\ x_1\ x_1\ x_1\ x_4\ x_6\ x_4$$

A possède

- un effet permutatif, un effet cachant de degré 2, un effet duplicatif de degré 2 et de puissance (3, 2).

Donc $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ et $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 5$

On a bien ici $n_1 + n_2 < \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i$.

Donc, toute combinaison linéaire formée d'occurrences de A de longueur supérieure à 6 ne possède pas de forme normale.

L'effet duplicatif seul pouvant être la cause de non-obtention de la forme normale, nous allons donner des conditions suffisantes de non-terminaison pour des combinaisons uniquement constituées d'occurrences de combinateurs à effet duplicatif. La Proposition suivante concerne les combinateurs linéaires.

Proposition 6 : Soit G une base de combinateurs A_j où $j \in J$ à effet duplicatif et soit n le cardinal de J .

Soit $(k_1, \ldots, k_j, \ldots, k_n)$ la liste des indices des variables les plus à gauche qu'affectent respectivement les effets duplicatifs de $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n$.

Soit X^i tel que $X \underset{i}{\triangleright} X^i$. On posera $X = X^0$.

Toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_j telle qu'il existe un indice $i \geq 0$ avec $\ell(X^i) > \sup_{j \in J} k_j$ ne possède pas de forme normale.

Démonstration : Supposons qu'il existe un indice i positif ou nul tel que :

$$\ell(X^i) > \sup_{j \in J} k_j .$$

X^i a la structure suivante :

$X^i = A_p \alpha$ avec $p \in J$ et $\alpha \in (V \cup V')^*$.

Or $\ell(X^i) > k_p$ car $p \in J$.

Donc, au moins un effet duplicatif de A_p affecte un combinateur appartenant à α , ce qui veut dire que :

$$\ell(X^{i+1}) > \ell(X^i) \quad \text{où} \quad X^i \underset{1}{\triangleright} X^{i+1} \quad ,$$

car A_p a un effet uniquement duplicatif.

Donc $$\ell(X^{i+1}) > \operatorname*{Sup}_{j \in J} k_j \quad .$$

On démontre que, plus généralement :

pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\ell(X^{i+m}) > \operatorname*{Sup}_{j \in J} k_j$, à cause de l'effet uniquement duplicatif des combinateurs A_j . Cela veut dire que, dans ce cas, pour tout m , une nouvelle étape de réduction pourra s'effectuer sur X^{i+m} en prenant comme opérateur le combinateur le plus à gauche dans X^{i+m} . Celui-ci existera toujours car, pour tout m :

$$\ell(X^{i+m}) > 1 \quad , \text{d'où } T(X) \text{ est infini.}$$

Exemple : Soient A_1 , A_2 et A_3 les trois combinateurs suivants :

$$A_1\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \ \triangleright\ x_1\ x_1\ x_2\ x_2\ x_3\ x_3\ x_4$$

$$A_2\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \ \triangleright\ x_1\ x_2\ x_3\ x_3\ x_4$$

$$A_3\ x_1\ x_2 \ \triangleright\ x_1\ x_2\ x_2$$

alors $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ et $k_3 = 2$.

Soit $X = A_1\ A_2\ A_3$. X n'a pas de forme normale ; en effet,

$$X_d = A_1\ A_2\ A_3\ x_1\ x_2 \ \underset{1}{\triangleright}\ A_2\ A_2\ A_3\ A_3\ x_1\ x_1\ x_2 = X_d^1$$

alors $X^1 = A_2\ A_2\ A_3\ A_3$ avec $\ell(X^1) = 4 > 3$ donc X n'a pas de forme normale puisque X^1 n'en a pas.

Etudions ce que devient la condition de la proposition précédente dans le cas de combinaisons non linéaires de combinateurs à effet duplicatif. Nous devons, tout d'abord, définir le nombre d'éléments d'un terme combinatoire.

Définition : Le nombre d'éléments d'un combinateur X noté $N(X)$ est défini récursivement de la façon suivante :

1) si X est un combinateur de base, $N(X) = 1$

2) si $X = X_1 X_2$, $N(X) = N(X_1) + N(X_2)$

3) si $X = X_1 (X_2)$, $N(X) = N(X_1) + 1$

Proposition 7 : Soit G une base de combinateurs A_j , où $j \in J$, à effet duplicatif. Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_j et soit X^i le terme tel que $X \underset{i}{\triangleright} X^i$ avec $X = X^0$.

S'il existe un entier i positif ou nul tel que $N(X^i) > \sup\limits_{j \in J} k_j$, (la suite des k_j est définie comme précédemment), alors X n'a pas de forme normale.

Exemple : Soient A_1 , A_2 , A_3 les trois combinateurs

$A_1\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \triangleright x_1\ x_2\ x_2\ x_3\ x_3\ x_4$, $k_1 = 2$

$A_2\ x_1\ x_2\ x_3 \triangleright x_1\ x_2\ x_3\ x_3$, $k_2 = 3$

$A_3\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5 \triangleright x_1\ x_2\ x_2\ x_3\ x_4\ x_4\ x_5\ x_5$, $k_3 = 2$

Soit X le combinateur défini sur la base $G = (A_1 , A_2 , A_3)$ tel que

$$X = A (A_2\ A_3\ (A_3\ A_3\ A_1))\ (A_1\ A_2)$$

avec $N(X) = 3$, X ne possède pas de forme normale.

VII - CONCLUSION

Nous avons présenté quelques résultats obtenus dans le cadre d'une étude plus générale sur la complexité de réduction en Logique combinatoire [11] . La décomposition des combinateurs suivant leurs effets nous a permis de définir de nouvelles bases et d'énoncer certaines propositions relatives à l'existence de la forme normale. Par contre, afin de pouvoir se référer aux bases classiques de combinateurs (I , K , S , ...) , nous avons programmé en LISP des algorithmes qui permettent la traduction d'un combinateur à effets quelconques, en fonction des combinateurs classiques.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

1. G. Ausiello, "Abstract Computational Complexity and Cycling Computations", J.C.S.S. , vol. 5 , 1971 , pp. 118-128 .

2. G. Ausiello, "Computational Complexity. Main Results and a Commentary", Séminaire I.R.I.A. , 1972 .

3. C. Batini et A. Pettorossi, "On Subrecursiveness in Weak Combinatory Logic, in λ Calculus and Computer Science Theory", Proceedings of the Symposium held in Rome, C. Bohm, Ed. , Springer Verlag, 1975 , pp. 288-297 .

4. M. Blum, "A Machine Independent Theory of the Complexity of Recursive Functions", J.A.C.M. , vol. 14 , n° 2 , 1967 , pp. 322-336 .

5. C. Bohm et M. Dezani-Ciancaglini, "λ-Terms as Total or Partial Functions on Normal Forms, in λ-Calculus and Computer Science Theory", Proceedings of the Symposium held in Rome, C. Bohm, Ed. , Springer Verlag, 1975 , pp. 96-121 .

6. C. Bohm et M. Dezani-Ciancaglini, "Combinatorial Problems, Combinator Equations and Normal Forms", in Automata, Languages and Programming, 2nd Colloquium, University of Saarbrücken, J. Loeckx, Ed. , Springer Verlag, 1974 , pp. 185-199 .

7. C. Bohm, M. Coppo et M. Dezani-Ciancaglini, "Terminations Tests inside λ-Calculus", in Automata, Languages and Programming, Fourth Colloquium, University of Turku, A. Salomaa et M. Steinby, Ed. , Springer Verlag, 1977 , pp. 95-110 .

8. C. Bohm, "The CUCH as a Formal and Description Language", in Formal Languages, Description Languages for Computer Programming, T. B. Steel, Ed. , North Holland, 1966 , pp. 179-197 .

9. R. Canal, "Complexité de la Réduction en Logique combinatoire", R.A.I.R.O. Informatique Théorique, vol. 12 , n° 4 , 1978 , pp. 339-367 .

10. R. Canal et J. Vignolle, "Effet cachant et complexité de réduction en logique combinatoire", Rapport interne Université Paul-Sabatier, Laboratoire "Langages et Systèmes Informatiques", 1978 .

11. R. Canal, "Etude de la complexité de calcul en logique combinatoire", Thèse 3ème Cycle, Université Paul-Sabatier, 1978 .

12. H. B. Curry, R. Feys et W. Craig, "Combinatory Logic", vol. 1 , Norgh Holland, Amsterdam, 1968 .

13. M. Dezani-Ciancaglini et S. Ronchi Della Roca, "Computational Complexity and Structures of λ-Terms", in Programmation, Proceedings of the 2nd International Symposium on Programming, B. Robinet, Ed. Dunod, Paris, 1976 , pp. 160-181 .

14. J. R. Hindley, B. Lercher et J. P. Seldin, "Introduction to Combinatory Logic", Cambridge University Press, 1972 .

15. P. J. Landin, "A Lambda-Calculus Approach", Advances in Programming and Non Numerical Computation, Pergamon Press, 1966 , pp. 97-141 .

16. J. J. Lévy, "Réductions correctes et optimales dans le Lambda-Calcul", Thèse de Doctorat, Université Paris-VII, 1978 .

17. J. Mc Carthy, "Recursive Functions of Symbolic Expressions and their Computation by Machine", Part I , Comm. A.C.M. , vol. 3 , n° 4 , 1960 , pp. 184-195 .

18. L. Nolin, "Logique Combinatoire et Algorithmes", C. R. Académie des Sciences, Paris, t. 272 , pp. 1435-1438 et pp. 1485-1488 , série A , 1971 .

19. A. Pettorossi, "Sulla Terminazione in Classi Subricorsive di Algorithmi", A.I.C.A. , Congress Genova, 1975 .

20. A. Pettorossi, "Combinators as Tree-transducers", Colloque sur les Arbres en Algèbre et en Programmation, Lille , 1977 .

21. J. C. Reynolds, "A simple Typeless Language Based on the Principle of Completeness and the Reference Concept", Comm. A.C.M. , vol. 13 , n° 5 , 1970 , pp. 308-319 .

22. B. Robinet, "Un modèle fonctionnel des structures de contrôle", R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11 , n° 3 , 1977 , pp. 213-236 .

23. J. B. Rosser, "A Mathematical Logic without Variables", Annals of Maths, n° 2 , 36 , 1935 , pp. 127-150 .

24. C. Ruggiu, "De l'organigramme à la formule", Thèse de Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1974 .

25. L. E. Sanchis, "Types of Combinatory Logic", Notre-Dame Journal of Formal Logic (5) , 1964 , pp. 161-180 .

26. J. Vignolle et R. Canal, "L'arrêt des programmes en Logique combinatoire", Actes Congrès A.F.C.E.T. , Tome 1 , novembre 1978 , pp. 288-298 .

-:-:-:-